

# ПРИМЕР ДЖЕЙНСА

Сергей Николенко

СПбГУ — Санкт-Петербург

20 ноября 2025 г.

*Random facts:*

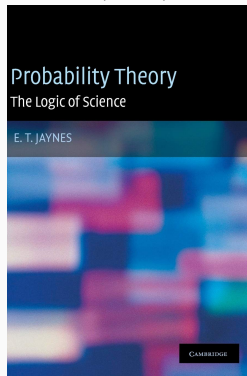


- 20 ноября в ООН — Всемирный день ребёнка; в этот день в 1959 г. была принята «Декларация прав ребёнка», а в 1989 — «Конвенция прав ребёнка»
- 20 ноября 1805 г. венский мясник Иоганн Ланер изобрёл сосиски
- 20 ноября 1910 г. Франсиско Мадеро опубликовал «план Сан-Луис-Потоси», в котором объявлял результаты президентских выборов недействительными и призывал к борьбе с режимом Порфирио Диаса, правившего к тому времени 34 года, чем запустил Мексиканскую революцию; а в доме Ивана Озолина, начальника станции Астапово, в тот же день умер Лев Толстой
- 20 ноября 1947 г. в Вестминстерском аббатстве принцесса Елизавета вышла замуж за лейтенанта Филипа Маунтбаттена, который при этом стал герцогом Эдинбургским
- 20 ноября 1979 г. у стен Каабы появился человек и объявил, что настало время для исполнения древнего пророчества, во имя которого в пределах Запретной Мечети была пролита кровь; захват заложников длился до 4 декабря, погибло 255 человек
- 20 ноября 1985 г. вышла первая графическая операционная система от Microsoft, Windows 1.0

## ПРИМЕР ДЖЕЙНСА

---

- Эдвин Томпсон Джейнс – физик, специалист по статистической механике, ввёл принцип максимума энтропии в термодинамике; развивал байесовские методы
- Probability Theory: The Logic of Science (2003):



## ПРИМЕР ДЖЕЙНСА

- Рассмотрим простую задачу байесовского вывода: предположим, что перед нами урна, в которой  $N$  шаров,  $R$  из которых красные, а  $N - R$  белые
- Мы достаём из урны  $n$  шаров,  $r$  из которых оказываются красными
- Легко найти распределение пар  $(n, r)$  по заданным  $N$  и  $R$ : вероятность вынуть из урны сначала  $r$  красных шаров подряд, а затем  $w$  белых, составляет

$$\begin{aligned} & \frac{R}{N} \frac{R-1}{N-1} \cdots \frac{R-r+1}{N-r+1} \cdot \frac{N-R}{N-r} \frac{N-R-1}{N-r-1} \cdots \frac{N-R-w+1}{N-r-w+1} = \\ &= \frac{R!(N-r)!}{(R-r)!N!} \cdot \frac{(N-R)!(N-r-w)!}{(N-R-w)!(N-r)!} = \frac{R!(N-R)!(N-n)!}{(R-r)!(N-R-w)!N!}. \end{aligned}$$

- Эта вероятность получена для конкретной последовательности исходов, и она по симметрии не зависит от последовательности, то есть достаточно умножить её на число возможных таких последовательностей  $\binom{n}{r}$ :

$$p(r|N, R, n) = \frac{R!(N-R)!(N-n)!}{(R-r)!(N-R-w)!N!} \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{\binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}},$$

то есть гипергеометрическое распределение

- Но теперь перед нами стоит обратная задача: мы получили данные  $D = (n, r)$  и хотим что-то сказать о значениях  $N$  и  $R$
- Байесовский вывод проходит точно так же, как выше:

$$p(N, R|D) = \frac{p(D|N, R) p(R|N) p(N)}{p(D)},$$

и здесь в знаменателе стоит нормировочная константа

$$p(D) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{R=0}^N p(D|N, R) p(R|N) p(N),$$

а правдоподобие представляет собой гипергеометрическое распределение

- Самый интересный вопрос: как выбрать априорное распределение  $p(N, R)$ ? Мы его уже разложили в произведение

$$p(N, R) = p(R|N) p(N);$$

в байесовском выводе мы выбираем априорное распределение как захотим, согласно своей интуиции, но чего мы можем захотеть от этого априорного распределения, как формализовать интуицию?

- Во-первых, есть интуиция о том, что апостериорное распределение на величину  $N$  должно зависеть от числа выбранных шаров  $n$  (как в случае танков), но не должно зависеть от того, сколько из них оказались красными: с какой стати пропорция красных шаров должна влиять на их общее число?

- Более того в данном случае хотелось бы, чтобы полученные данные «обрезали» невозможные значения, то есть сообщали нам, что  $N \geq n$ , но не меняли нашу априорную интуицию о том, сколько именно шаров может быть в урне, если это число больше  $n$ . Иными словами, хотелось бы получить

$$p(N|D) = \begin{cases} c \cdot p(N), & \text{если } N \geq n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $c$  — нормировочная константа, не зависящая от  $N$

- Это уже нетривиальное требование! Оно накладывает серьёзные ограничения на  $p(N, R)$

- Апостериорное распределение на  $N$  равно

$$p(N|D) = \frac{p(N) p(D|N)}{p(D)} = \frac{p(N) \sum_{R=0}^N p(D|N, R) p(R|N)}{p(D)},$$

и требование выше значит, что

$$p(D|N) = \sum_{R=0}^N p(D|N, R) p(R|N) = \begin{cases} f(n, r), & \text{если } N \geq n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $f(n, r)$  — это некоторая функция, зависящая от данных  $n$  и  $r$ , но не от  $N$

- Более того, можно вспомнить, что мы говорим о гипергеометрическом распределении: для  $N \geq n$

$$\sum_{R=0}^N \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} p(R|N) = f(n, r) \binom{N}{n}$$

- Это уже весьма нетривиальное условие на априорное распределение  $p(R|N)$ !
- Мы получили его из базовой интуиции о том, что данные не должны менять наше мнение об  $N$  (это в некотором смысле независимость), но мы вряд ли смогли бы записать такое условие интуитивно, без этих рассуждений
- Разумные априорные распределения на  $R$  будут удовлетворять этому условию, и байесовский вывод по  $N$  будет тривиальным: апостериорное распределение пропорционально априорному, за исключением начального отрезка  $N < n$ , который данные делают невозможным

## ПРИМЕР ДЖЕЙНСА

- Осталось выбрать  $p(R|N)$
- Первый вариант — равномерное распределение  $p(R|N) = \frac{1}{N+1}$  на интервале  $0, \dots, N$
- Условие легко получить из свойств суммирования биномиальных коэффициентов: мы знаем, что  $\sum_{R=0}^N \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} = \binom{N+1}{n+1}$  (слева выбираем один элемент из  $N+1$ , фиксируя  $R$ , а потом выбираем  $r$  из  $R$  слева от него и  $n-r$  из  $N-R$  справа, то есть по сути выбираем  $n+1$  элемент из  $N+1$ ), а значит,

$$\begin{aligned} \sum_{R=0}^N \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} p(R|N) &= \binom{N+1}{n+1} \frac{1}{N+1} = \\ &= \frac{(N+1)!(N+1-n-1)!}{(n+1)!(N+1)} = \frac{1}{n+1} \binom{N}{n}, \end{aligned}$$

то есть  $f(n, r) = \frac{1}{n+1}$ , и эта функция действительно не зависит от  $N$

- Апостериорное распределение тогда получается таким:

$$p(R|D, N) = \binom{N+1}{n+1}^{-1} \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r};$$

уже не гипергеометрическое, потому что по  $R$ , а не по  $N$

- Полученное апостериорное распределение удовлетворяет нескольким естественным требованиям «здравого смысла»:
  - для  $n = r = 0$  это распределение превращается в априорное распределение  $p(R|N) = \frac{1}{N+1}$ ;
  - для  $n = r = 1$  (вытащили один шар, и он оказался красным) получается  $p(R|D = (1, 1), N) = \frac{2R}{N(N+1)}$ , что пропорционально  $R$ ; это тоже естественно, потому что в правдоподобии вероятность вытащить красный шар  $p(r = 1|n = 1, R, N) = \frac{R}{N}$ , и мы умножаем это правдоподобие на равномерное распределение;
  - кроме того,  $\frac{2R}{N(N+1)}$  равно нулю при  $R = 0$  (что логически невозможно), и это свойство сохраняется для всех  $n \geq r \geq 1$

- Кроме того, можно провести байесовский вывод дальше, почти в точности как для монетки
- Для нашего апостериорного распределения

$$p(R|D, N) = \binom{N+1}{n+1}^{-1} \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r}$$

максимальная апостериорная гипотеза будет (проверьте в качестве упражнения)

$$R_{\text{MAP}} = \left\lfloor \frac{r}{n} (N+1) \right\rfloor,$$

что тоже звучит вполне естественно

## ПРИМЕР ДЖЕЙНСА

- Но этот максимум не совпадает с математическим ожиданием:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R] &= \sum_{R=0}^N R \cdot p(R|D, N) = \binom{N+1}{n+1}^{-1} \sum_{R=0}^N R \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} = \\ &= \binom{N+1}{n+1}^{-1} \left( \sum_{R=0}^N (R+1) \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} - \sum_{R=0}^N \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} \right) = \\ &= \binom{N+1}{n+1}^{-1} \left( \sum_{R=0}^N (r+1) \binom{R+1}{r+1} \binom{N-R}{n-r} - \sum_{R=0}^N \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} \right) = \\ &= (r+1) \binom{N+1}{n+1}^{-1} \binom{N+2}{n+2} - 1 = \frac{(N+2)(r+1)}{n+2} - 1,\end{aligned}$$

где мы воспользовались известным тождеством о биномиальных коэффициентах:  $(R+1)\binom{R}{r} = (r+1)\binom{R+1}{r+1}$

- Для больших  $N$ ,  $r$  и  $n$  этот результат, конечно, похож на  $R_{\text{МАР}}$ , но поправка существенна: ожидаемая доля красных шаров, остающихся в урне, составляет

$$\frac{\mathbb{E}[R] - r}{N - n} = \frac{(N + 2)(r + 1) - (n + 2) - r(n + 2)}{(N - n)(n + 2)} = \frac{r + 1}{n + 2},$$

то есть мы опять получили в точности правило Лапласа

- Можно и предсказательное распределение в виде правила Лапласа получить (опять упражнение):

$$\begin{aligned} p(\text{Red}|D, N) &= \sum_{R=0}^N R \cdot p(\text{Red}, R|D, N) = \\ &= \sum_{R=0}^N R \cdot p(\text{Red}|R, D, N) p(R|D, N) = \\ &= \binom{N+1}{n+1}^{-1} \sum_{R=0}^N \frac{R-r}{N-n} \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} = \frac{r+1}{n+2}. \end{aligned}$$

- Аналогично (и снова упражнение) можно найти дисперсию апостериорного распределения:

$$\hat{R} = r + (N - n)p \pm \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n + 3}(N + 2)(N - n)},$$

где мы обозначили  $p = \frac{r+1}{n+2}$ , а также подсчитали дисперсию именно оценки  $R$ , а не оценки вероятности  $\frac{R-r}{N-n}$

- Оценка вероятности становится точнее с ростом  $n$ , то есть с ростом полученной выборки, причём падает до нуля, если  $n = N$  — это очень интуитивно!

- А если вернуться к оценке доли шаров, то нам нужно будет разделить предыдущую оценку на  $N - n$ , и мы получим

$$\frac{\hat{R} - r}{N - n} = p \pm \sqrt{\frac{p(1-p)}{n+3} \frac{N+2}{N-n}}$$

- Теперь ситуация обратная: чем больше шаров мы вынули из урны, тем менее точной будет оценка доли оставшихся, а в пределе  $N \rightarrow \infty$  останется как раз  $p \pm \sqrt{\frac{p(1-p)}{n+3}}$ , что в точности соответствует дисперсии монетки
- Но давайте исследуем и другие формы априорных распределений!

- Сначала сделаем совсем небольшое изменение:  
предположим, что нам заранее известно, что в урне есть хотя бы один красный и хотя бы один белый шар, а в остальном оставим распределение равномерным:  $p(R|N) = \frac{1}{N-1}$  на интервале  $1, \dots, N-1$
- Тогда нужно выбросить слагаемые, соответствующие  $R=0$  и  $R=N$ ; для  $R=0$   $\binom{R}{r} = [r=0]$ , а для  $R=N$   $\binom{N-R}{n-r} = [r=n]$ , и наше тождество превращается в

$$\sum_{R=1}^{N-1} \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} = \binom{N+1}{n+1} - \binom{N}{n} [r=n] - \binom{N}{n} [r=0]$$

- Соответственно, апостериорное распределение теперь

$$p(R|D, N) = \frac{\binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N+1}{n+1} - \binom{N}{n} [r=n] - \binom{N}{n} [r=0]}$$

- Первое наблюдение: если мы получили данные с  $0 < r < n$  (среди выбранных были и красные, и белые шары), то вся разница пропадает, и апостериорное распределение остаётся тем же
- Это кажется контринтуитивным: мы изменили вероятностное пространство, а распределение осталось тем же самым!  
Джейнс пишет так: «И всё же после некоторого размышления мы видим, что результат верен, поскольку в этом случае из данных можно дедуктивно умозаключить, что  $R$  не может быть равным нулю или  $N$ ; поэтому не важно, говорит ли нам то же самое ещё и априорное распределение: состояние наших знаний об  $R$  в этих двух случаях одно и то же, на что указывают и теория вероятностей, и логика»

- А, например, для  $r = 0$ , когда мы не вытащили ни одного красного шара, результат изменится:

$$\begin{aligned} p(R|D = (0, n), N) &= \binom{N-R}{n} \left( \binom{N+1}{n+1} - \binom{N}{n} \right)^{-1} = \\ &= \binom{N}{n+1} \binom{N-R}{n}^{-1} \end{aligned}$$

для  $R = 1, \dots, N-1$  и 0 вне этого интервала

- Это в точности совпадает с апостериорным распределением выше, только перенормированным на константу  $\frac{N+1}{N-n}$
- Хотя на этот раз изменение в априорном распределении исключило аж максимальную апостериорную гипотезу  $R = 0$ , общий вид распределения на оставшейся части носителя всё равно не изменился; разные априорные распределения не обязательно приводят к разным выводам

- Идём дальше: правило Лапласа говорит, что предсказание при равномерном распределении сглаживается, причём это сглаживание в точности соответствует правдоподобию данных, в которых мы достали из урны два шара, и один из них оказался красным (эквивалентный размер выборки)
- Иначе говоря, равномерное априорное распределение даёт при выводе некоторую информацию, соответствующую выборке из  $n = 2$  шаров
- Можно ли придумать полностью неинформативное (uninformative) априорное распределение, такое, чтобы никакой добавки не получалось?

- Давайте искать это распределение так: с какого распределения нужно начать, чтобы после получения данных  $D = (n, r) = (2, 1)$  прийти к равномерному?
- Иначе говоря, на какое априорное распределение нужно умножить правдоподобие

$$p(r = 1 | N, R, n = 2) = \frac{\binom{R}{1} \binom{N-R}{1}}{\binom{N}{2}} = \frac{R(N-R)}{N(N-1)},$$

чтобы на выходе получилась константа?

- На первый взгляд кажется, что ничего не выйдет, ведь для  $R = 0$  и  $R = N$  получается  $p(r = 1 | N, R, n = 2) = 0$

- Но мы только что придумали, как с этим справиться:отрежем крайние случаи в априорном распределении, и апостериорное не изменится, если  $1 \leq r \leq n - 1$ , а у нас данные именно такие!
- Таким образом, для априорного распределения

$$p(R|N) = \frac{\text{const}}{R(N-R)} \quad \text{для} \quad R = 1, \dots, N-1,$$

апостериорное распределение будет равно

$$\begin{aligned} p(R|D = (n, r), N) &= \frac{\text{const}}{R(N-R)} \binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} = \\ &= \frac{\text{const}}{r(n-r)} \binom{R-1}{r-1} \binom{N-R-1}{n-r-1}, \end{aligned}$$

- А из этого по формуле суммирования можно и нормировочную константу получить: для  $R = 1, \dots, N - 1$

$$p(R|D = (n, r), N) = \binom{N-1}{n-1}^{-1} \binom{R-1}{r-1} \binom{N-R-1}{n-r-1}$$

- Если подставить  $n = 2$  и  $r = 1$ , мы получим равномерное распределение  $\frac{1}{N-1}$ ; можно доказать, что и требуемое свойство выполняется, то есть можно вести вывод отдельно на  $R$ , и получить формулы ожидания и дисперсии апостериорного распределения (упражнение)

- Последний случай — «распределение биномиальных обезьян» (binomial monkey prior): предположим, что урна наполнялась шарами, каждый из которых имел некоторую вероятность  $g$  быть красным, причём цвет шаров выбирался независимо друг от друга (обезьяны-дальтоники бросают туда случайно выбранные мячи)
- Тогда априорное распределение будет биномиальным:

$$p(R|N) = \binom{N}{R} g^R (1-g)^{N-R}$$

- Это значит, что априори мы можем оценить число красных шаров в урне как  $\hat{R} = Ng \pm \sqrt{Ng(1-g)}$

## ПРИМЕР ДЖЕЙНСА

- Теперь проведём байесовский вывод; проверим наше свойство:

$$\begin{aligned} p(D|N) &= \sum_{R=0}^N p(D|N, R) p(R|N) = \sum_{R=0}^N \frac{\binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}} \binom{N}{R} g^R (1-g)^{N-R} = \\ &= \binom{n}{r} \sum_{R=0}^N \binom{N-n}{R-r} g^R (1-g)^{N-R} = \\ &= \binom{n}{r} g^r (1-g)^{n-r} \sum_{R=0}^N \binom{N-n}{R-r} g^{R-r} (1-g)^{N-n-R} = \binom{n}{r} g^r (1-g)^{n-r}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что (проверьте!)

$$\binom{R}{r} \binom{N-R}{n-r} \binom{N}{R} = \binom{N}{n} \binom{n}{r} \binom{N-n}{R-r},$$

а затем просуммировали по биномиальному распределению, выбирающему  $R - r$  красных шаров из  $N - n$  попыток; результат не зависит от  $N$ , так что свойство выполняется

- Подсчитаем апостериорное распределение:

$$p(R|D, N) = \text{const} \cdot \binom{N}{R} g^R (1-g)^{N-R} \binom{R}{r} \binom{N-r}{n-r},$$

и нормировочную константу можно подсчитать как

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{R=0}^N p(R|D, N) = \text{const} \binom{N}{n} \binom{n}{r} \sum_{R=0}^N \binom{N-n}{R-r} g^R (1-g)^{N-R} = \\ &= \text{const} \binom{N}{n} \binom{n}{r} g^r (1-g)^{n-r} \end{aligned}$$

для  $R = r, \dots, N - n + r$

- Теперь можно выразить  $\text{const}$  и найти апостериорное распределение уже полностью, вместе с константой:

$$p(R|D, N) = \binom{N-n}{R-r} g^{R-r} (1-g)^{N-R-n+r}$$

- Отсюда можно найти и среднее, и дисперсию апостериорной оценки  $\hat{R}$ :

$$\hat{R} = r + (N-n)g \pm \sqrt{g(1-g)(N-n)},$$

и мы получаем оценку на долю оставшихся красных шаров

$$\frac{\hat{R} - r}{N - n} = g \pm \sqrt{\frac{g(1-g)}{N - n}}.$$

- Раньше апостериорное распределение на  $p$  определялось в первую очередь данными  $D = (n, r)$ , а теперь данные вообще практически не участвуют в оценках!
- Значение  $r$  для оценки теперь вообще не важно, а значение  $n$  просто постепенно уменьшает дисперсию
- Биномиальное априорное распределение *отменяет влияние данных*: апостериорная оценка совпадает с априорной и никак не зависит от  $r$  и  $n$ !
- Это выглядит странно, но, опять же, вполне интуитивно: априорное распределение с «биномиальными обезьянами» предполагало, что цвет шаров выбирается независимо друг от друга — вот и получилось, что знание цвета части шаров ничего не сообщает нам о цвете остальных
- Эта независимость оказалась «пропущена через» байесовский вывод и сохранилась в апостериорном результате

- Итак, мы рассмотрели пример об урне, из которой достают красные и белые шары, и провели байесовский вывод для нескольких разных априорных распределений:
  - обычного равномерного распределения на  $R = 0, \dots, N$ ;
  - обрезанного равномерного, в котором исключены крайние случаи только красных и только белых шаров в урне, то есть равномерного распределения на  $R = 1, \dots, N - 1$ ;
  - неинформативного распределения  $\frac{\text{const}}{R(N-R)}$ , которое не даёт дополнительного сглаживания в апостериорном распределении;
  - распределения биномиальных обезьян  $p(R|N) = \binom{N}{R} g^R (1-g)^{N-R}$ , которое, как выяснилось, полностью отменяет влияние данных и сохраняет независимость цвета шаров в урне друг от друга.
- Тем самым мы рассмотрели несколько важных частных случаев, которые дают представление о том, насколько разных и интересных эффектов можно добиться выбором априорного распределения; пока на дискретном примере...

СПАСИБО!

Спасибо за внимание!

