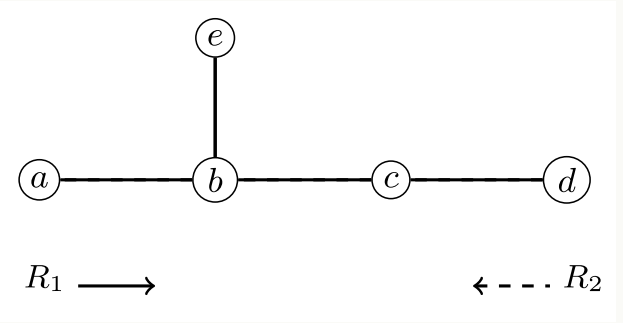
# Параметризации "above-guarantee": идеи и задачи

Насколько трудно улучшить
заведомо достижимое?

Данил Сагунов

# Пример: MAPF below distance sum

Transient MAPF: r агентов идут из $s_i$ в $t_i$.
Старт можно отложить; по прибытии исчезают.
Вершины и рёбра одновременно не делят.
Цель — время прибытия последнего агента.




Последовательно по кратчайшим путям:

$$L = 1 + \sum_i \mathrm{dist}(s_i, t_i)$$

**Буфер e: 5 шагов вместо 7**

## Можно ли завершить за $L - \zeta$ шагов?

Известен алгоритм со временем $f(r, \zeta) \cdot \mathrm{poly}(n)$

Параметры — число агентов r и экономия $\zeta$

# Параметризованные алгоритмы: FPT и XP

Дана вычислимая нижняя оценка $g(I) \leq OPT(I)$

$$OPT(I) \geq g(I) + k \ ?$$

N — размер входа; k — параметр превышения

## FPT

$$f(k) \cdot N^{c}$$

Степень c — константа,
не зависит от k.

Например: $2^{k} \cdot N^{3}$

## XP

$$N^{h(k)}$$

При каждом фиксированном k
время полиномиально.

Например: $N^{k+1}$

FPT $\subseteq$ XP. В XP степень полинома может зависеть от k.

# MAPF: идея FPT-алгоритма

r агентов, $\zeta = L - \lambda$, $n = |V(G)|$

## Короткий горизонт

$$\lambda = O(r\zeta)$$

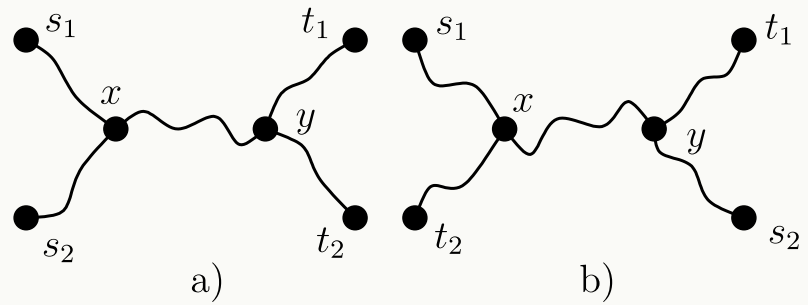
Разворачиваем граф по времени: вершины $(v, \tau)$, $0 \le \tau \le \lambda$. Непересекающиеся пути ищем с помощью color-coding.

$$2^{O(r\lambda)} \cdot \mathrm{poly}(n)$$

**Итого:** $2^{O(r^2\zeta)} \cdot \mathrm{poly}(n)$

## Большие расстояния

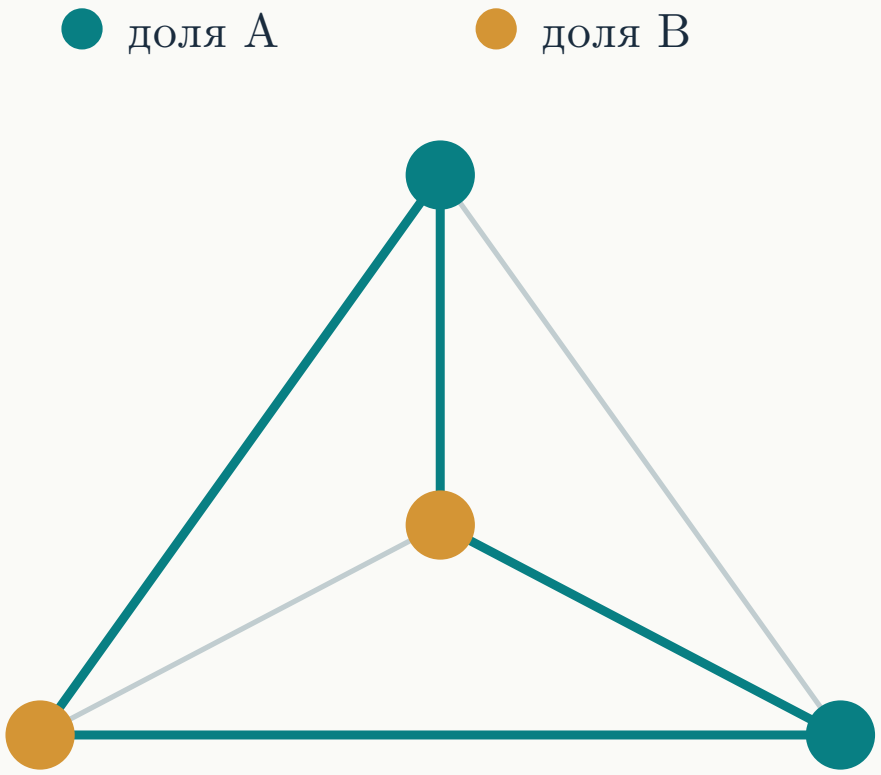
Сначала исключаем случаи, где агент или пара не успевают за $\lambda$. Затем леммы дают экономию $\zeta$ либо оставляют $\lambda = O(r\zeta)$.




a) сонаправленные; b) встречные

Bentert, Eiben, Fomin, Golovach. IPEC 2026. arXiv:2609.18802, Lemma 7, Theorem 1; fig. 2

# Max-Cut: задача




$K_4$: разрез из 4 рёбер

Разбить вершины на две доли и максимизировать число рёбер между долями

$$\mathrm{OPT} = \mathrm{MaxCut}(G)$$

**В версии above-guarantee ищем g(G) + k рёбер**

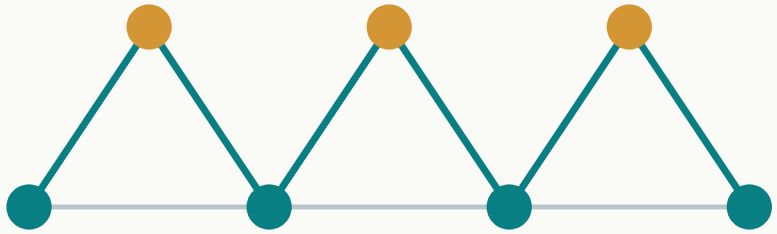
# Max-Cut: оценки

Для любого графа

$$g_1(G) = m/2$$

Для связного графа: оценка Эдвардса–Эрдёша

$$g_2(G) = m/2 + (n-1)/4$$



В каждом треугольнике 2 ребра разреза.
На цепочках $g_2 = \mathrm{OPT}$.

# Max-Cut: положительные и отрицательные результаты

| Порог | Результат |
|---|---|
| $m/2 + k$ | FPT: $2^{O(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ |
| $m/2 + (n-1)/4 + k$ для связных графов | FPT: $2^{O(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ |

**При ETH субэкспоненциальное время невозможно**

Нет алгоритма $2^{o(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ для порога $g_2 + k$

Mahajan, Raman, 1999. Crowston, Jones, Mnich, 2015

# Max-Cut: идея для оценки m/2

Связный граф: ищем $m/2 + k$

## $n \geq 4k + 1$

Гарантия Эдвардса–Эрдёша уже обеспечивает ответ «да»

## $n \leq 4k$

Перебираем все разрезы на $O(k)$ вершинах

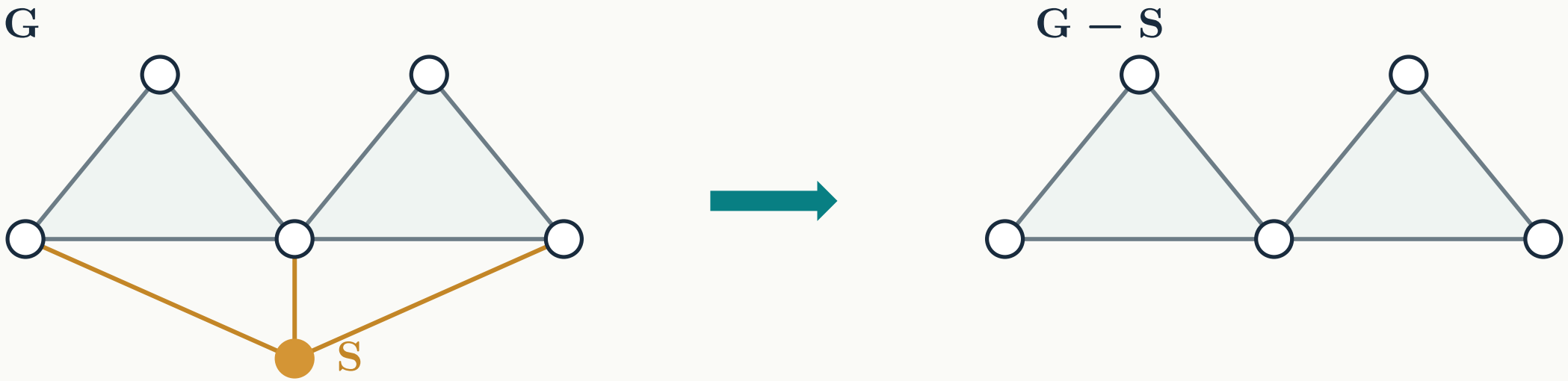
Время: $2^{O(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$

Для несвязного графа оценку применяем покомпонентно

# Max-Cut: идея для сильной оценки

## Связный граф: $g(G) = m/2 + (n - 1)/4$

Либо есть разрез размера $g(G) + k$, либо найдётся $S$ из $O(k)$ вершин, после удаления которого каждый блок является кликой.




**Перебор раскраски S + динамика по блокам**

Crowston, Jones, Mnich. Max-Cut above Edwards–Erdős

# Max-SAT: задача

Дана КНФ из m дизъюнктов. Нужно выбрать значения переменных и выполнить как можно больше дизъюнктов.

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y)$$

$x = 1,\ \ y = 0,\ \ z = 1$

В этом примере выполнены все три дизъюнкта

# Max-SAT: оценки

Дизъюнкт на r различных переменных ложен с вероятностью $2^{-r}$

| Длина дизъюнкта | Вероятность выполнения |
|---|---|
| 1 | 1/2 |
| 2 | 3/4 |
| 3 | 7/8 |

**Точное ожидание**

$$A(F) = \sum (1 - 2^{-r_i})$$

$$A(F) \geq m/2$$

# Max-SAT: положительные и отрицательные результаты

| Порог | Ограничение | Сложность |
|---|---|---|
| $m/2 + k$ | Любые длины | FPT по k |
| $A(F) + k$ | Длина $\leq r$ | FPT по (k, r) |
| $A(F) + k$ | Длины не ограничены | NP-полно уже при $k = 2$ |

**Более сильная оценка даёт меньший параметр, но требует нового алгоритма**

# Max-SAT: идеи алгоритма и сведения

## Ограниченная длина дизъюнктов

Записываем превышение над ожиданием как полином степени $\leq$ r на переменных $\pm 1$. Сводим к взвешенным уравнениям чётности и сокращаем систему.

---

## Неограниченная длина

В сведении из 3-SAT строим $F'$ с $A(F') = m' - 2$.
Тогда превышение 2 требует выполнить все дизъюнкты.

# Max-r-SAT: полином превышения

Длина дизъюнктов $\leq r$. Ищем $\mathrm{sat}(F, x) \geq A(F) + k$.

$$P(x) = 2^r \left(\mathrm{sat}(F, x) - A(F)\right)$$

При $x_i \in \{-1, 1\}$ это полином степени $\leq r$
с целыми коэффициентами и $E[P] = 0$.

**Пример: один дизъюнкт $C = (x \vee \neg y)$**

$$4\left(\mathrm{sat}(C, x, y) - 3/4\right) = x - y + xy$$

Складываем одинаковые мономы и удаляем нулевые коэффициенты.

Alon, Gutin, Kim, Szeider, Yeo. SODA 2010 / Algorithmica 2011, §4

# Max-r-SAT: почему FPT по (k, r)

$t$ — число ненулевых мономов после сокращения. Тогда

$$\sigma^2 = E[P^2] \geq t$$

Лемма для степени $\leq r$: $\max P \geq c(r) \cdot t^{1/2}$, где $c(r) > 0$.

Положим $B(r) = (2^r / c(r))^2$. Это функция только от $r$.

## Много мономов

$t \geq B(r) \cdot k^2$

Тогда $\max P \geq 2^r k$:
ответ «да».

**Время:** $2^{g(r) \cdot k^2} \cdot \mathrm{poly}(N)$

## Мало мономов

$t < B(r) \cdot k^2$

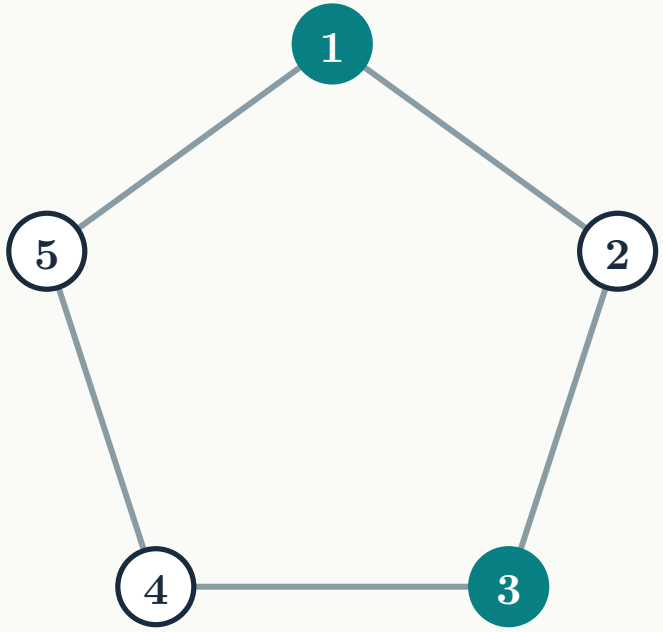
Не более $r \cdot t$ переменных:
перебираем их значения.

$g(r) = O(r \cdot B(r))$

Alon, Gutin, Kim, Szeider, Yeo. SODA 2010 / Algorithmica 2011, §4

# Independent Set: задача

Найти как можно больше попарно несмежных вершин




**I = {1, 3}**

$$OPT = \alpha(G)$$

**У пятицикла $\alpha = 2$**

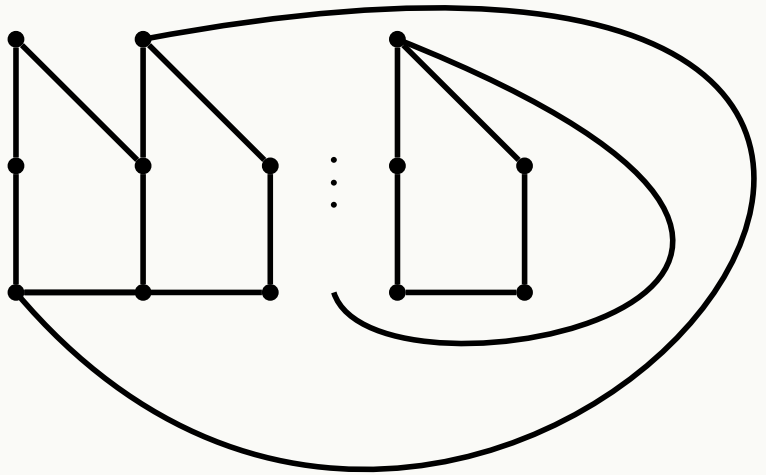
Версия above-guarantee:
$\alpha(G) \geq g(G) + k$?

# Independent Set: оценки из раскраски

q-раскрашиваемость: $\alpha(G) \geq n/q$

| Класс графов | Оценка |
|---|---|
| Планарные | $\alpha(G) \geq n/4$ |
| Планарные без треугольников | $\alpha(G) \geq n/3$ |
| Тот же класс | $\alpha(G) \geq (n+1)/3$ |

Самый большой цветовой класс независим



**Точное семейство:**
**$\alpha(G) = (n+1)/3$**

Рис.: Dvořák, Mnich. Large Independent Sets in Triangle-Free Planar Graphs, fig. 1

# Independent Set: положительный результат и предел

Планарные графы без треугольников

**Проверка существования $n/3 + k$ вершин**

за $2^{O(\sqrt{k})} \cdot n$

**При ETH зависимость от $\sqrt{k}$ асимптотически оптимальна**

Нет алгоритма $2^{o(\sqrt{k})} \cdot \mathrm{poly}(n)$

Dvořák, Mnich. SIDMA 2017, теорема 1 и раздел 8

# Independent Set: идея через древесную ширину

## Структурная теорема

$$\mathrm{tw}(G) \geq t \quad \Rightarrow \quad \alpha(G) \geq (n + c \cdot t^2)/3$$

### Большая ширина

При $t$ порядка $\sqrt{k}$ нужное превышение уже существует

### Малая ширина

Динамика по древесной декомпозиции ширины $O(\sqrt{k})$

$\mathrm{tw}(G)$ измеряет размер границ частей в древесной декомпозиции

# Independent Set: гарантия Турана

Любой граф. Средняя степень $d = 2m/n$.

$$\alpha(G) \geq n/(d+1)$$

**Случайный порядок вершин**

Берём вершину, если она раньше всех своих соседей.
Соседние вершины одновременно попасть в I не могут.

$$E|I| = \sum_v 1/(\deg(v)+1) \geq n/(d+1)$$

Оценка точна на объединении одинаковых клик

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Turán's Theorem Through Algorithmic Lens, WG 2023

# Оценка Турана: результаты above-guarantee

$$\alpha(G) \geq n/(d+1) + k \ ?$$

**Сжатие до $O(kd^2)$ вершин**

Время $2^{O(kd^2)} \cdot n^2$

**FPT по паре (k, d)**

**Предел по k: следствие ETH**

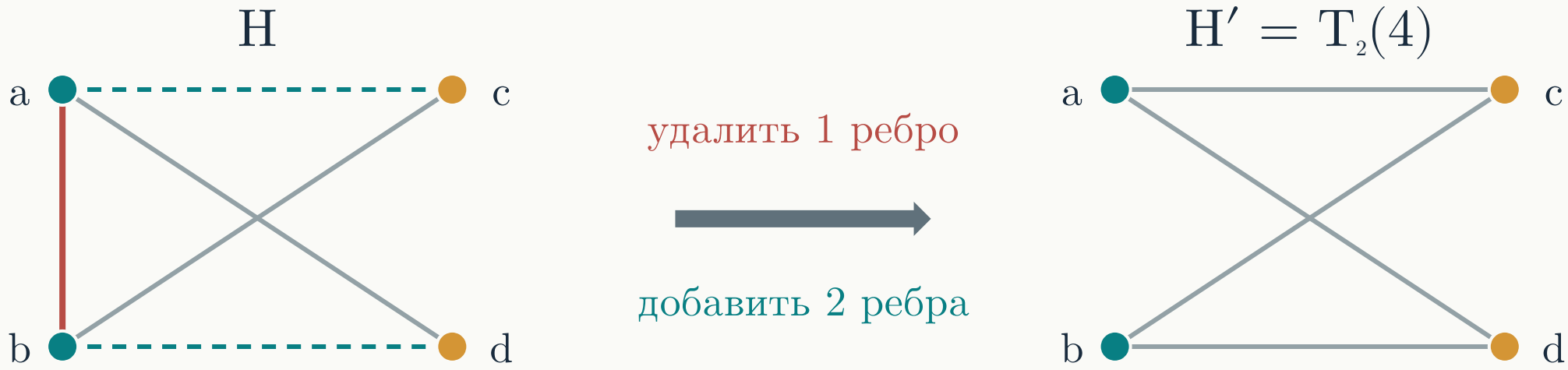
Нет $2^{o(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ даже при $d = O(1)$

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Turán's Theorem Through Algorithmic Lens, WG 2023 · §2.3, Corollaries 3–4

# Туран: не более 3k изменений смежности

В дополнении $H = \bar{G}$: $m(H) \geq t_r(n) - k$, где $k$ — дефицит рёбер.

Либо есть $K_{r+1}$, либо $H$ близок к полному $p$-дольному графу $H'$.




$$|E(H) \triangle E(H')| \leq 3k$$

Пример: $r = 2$, $k = 1$

$r - k \leq p \leq r$. Части могут иметь разные размеры.

Концы изменённых пар дают $O(k)$ особых вершин и малое сжатие.

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Turán's Theorem Through Algorithmic Lens, WG 2023 · Lemma 1

# Длинные пути и циклы: задачи

01 Longest Path: простой путь максимальной длины

02 Long (s,t)-Path: простой путь между заданными s и t

03 Longest Cycle: простой цикл максимальной длины




Длина пути = 4 ребра

# Длинные пути и циклы: оценки

| Объект | Оценка длины | Условие |
|---|---|---|
| (s,t)-путь | $\mathrm{dist}(s,t)$ | s и t связаны |
| Произвольный путь | $d(G)$ | d: вырожденность |
| (s,t)-путь | $\delta(G)$ | 2-связность |
| Цикл | $\min\{n, 2\delta(G)\}$ | 2-связность |
| Цикл | $\mathrm{mad}(G)$ | $\mathrm{mad}(G) \geq 2$ |

$\mathrm{mad}(G) = \max 2|E(H)|/|V(H)|$.
$d(G) = \max \delta(H)$. Максимумы по непустым подграфам H.

# Длинные пути и циклы: положительные результаты

| Порог | Класс графов |
|---|---|
| $\mathrm{dist}(s,t) + k$ для $(s,t)$-пути | Неориентированные графы |
| $d(G) + k$ для пути | Неориентированные графы |
| $2\delta(G) + k$ для цикла | 2-связные графы |
| $\mathrm{mad}(G) + k$ для цикла | 2-связные графы |

Во всех строках: $2^{O(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$

# Длинные пути и циклы: отрицательные результаты

## Без 2-связности

Цикл длины $\geq \mathrm{mad}(G) + 2$:
NP-полная задача

---

## Даже при 2-связности

Время $2^{o(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ для mad + k невозможно при ETH

Для поиска циклов класс графов принципиален

# Длинные циклы: положительный результат для приближения

Пусть обычный полиномиальный алгоритм
находит цикл длины хотя бы $a(L)$, если $OPT = L$

Тогда в 2-связном графе с $OPT = 2\delta + K$

можно найти цикл длины $2\delta + \Omega(a(K))$

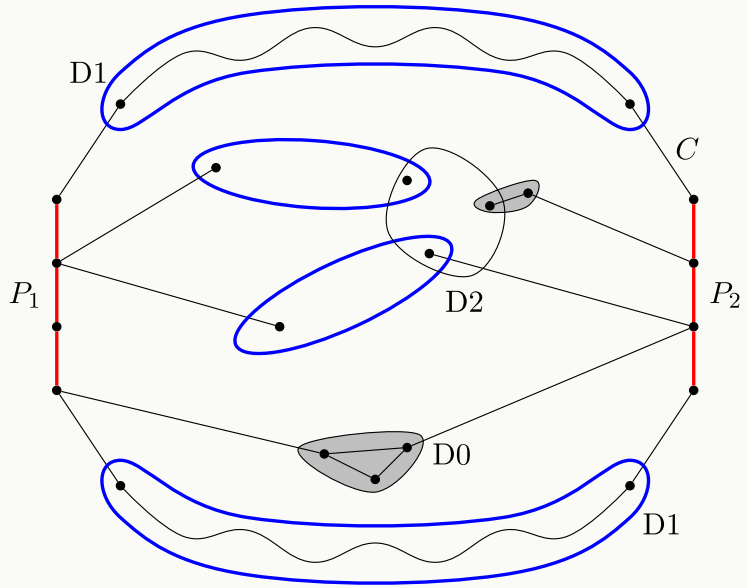
Например: $2\delta + 2^{\Omega(\sqrt{\log K})}$

$a$ не убывает и субаддитивна. Предполагаем $\delta \leq n/2$.

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. ICALP 2023, Algorithmica 2024

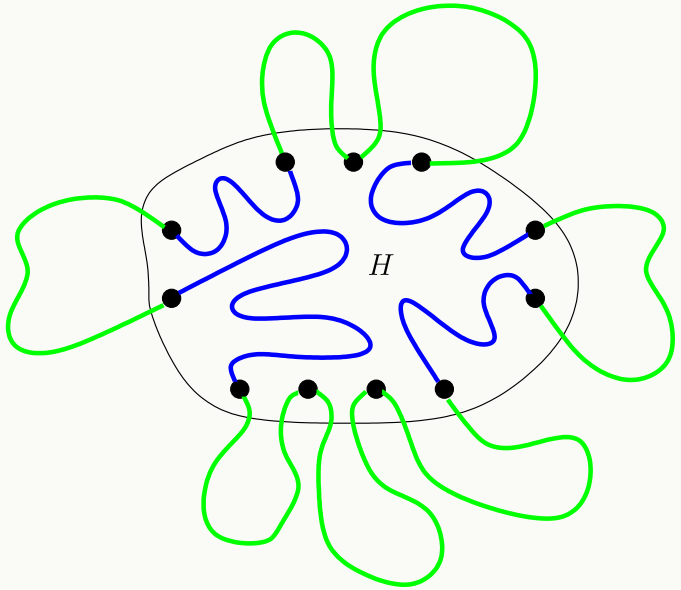
# Длинные циклы: идеи точных алгоритмов

## 2δ: разложение Дирака




$P_1$ и $P_2$ задают разложение цикла C.
Синие контуры выделяют компоненты.
Серым отмечены вершины множества B.

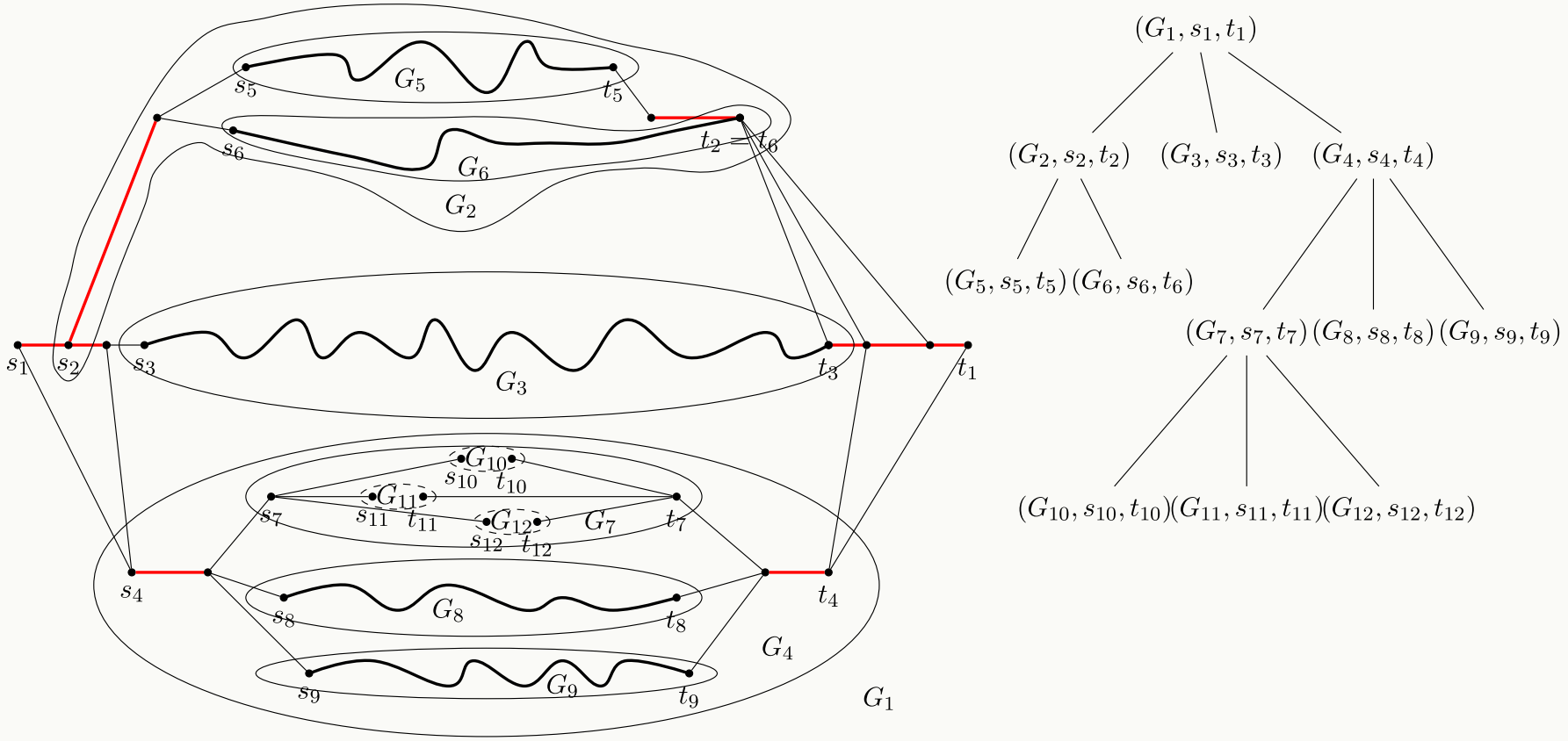
## mad: плотное ядро H




Зелёным показаны внешние участки,
синим участки внутри H.
Их соединяем через плотное ядро.

Рис.: Algorithmic Extensions of Dirac's Theorem, fig. 9; Longest Cycle above Erdős–Gallai Bound, fig. 1

# Длинные циклы: вложенные разложения







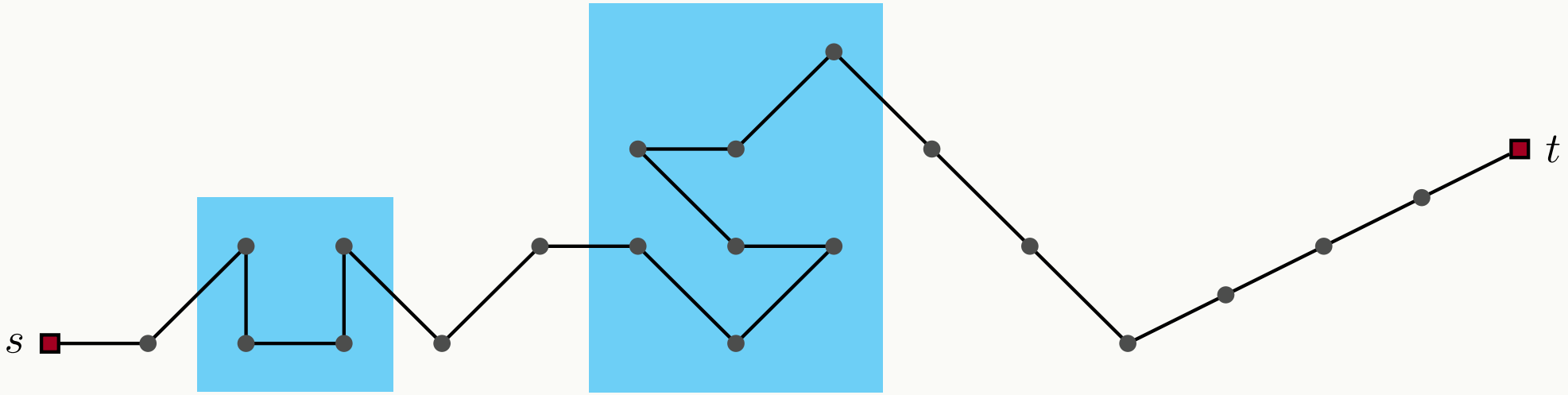
**Для подзадачи о (s, t)-пути строим вложенное разложение.**
**Сжатия выделяют запас, обратное преобразование возвращает базу.**

Рис.: Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Approximating Long Cycle Above Dirac's Guarantee, fig. 1

# Неориентированный Detour: задача и гарантия

Даны неориентированный невзвешенный граф G и связанные s, t.
Ищем простой (s, t)-путь P.

$$\ell(\mathrm{P}) \geq \mathrm{dist}(\mathrm{s},\, \mathrm{t}) + \mathrm{k}\ ?$$




**На рисунке dist(s, t) = 15, длина пути 21, превышение k = 6.**

Bezáková, Curticapean, Dell, Fomin, SIDMA 2019. Рисунок 5 из авторской версии

# Неориентированный Detour: положительные результаты

$\ell(P) \geq \mathrm{dist}(s, t) + k$

| Результат | Время |
|---|---|
| FPT по превышению k (2019) | $2^{O(k)} \cdot \mathrm{poly}(n)$ |
| Рандомизированный алгоритм (2023) | $3.432^k \cdot \mathrm{poly}(n)$ |
| Детерминированный алгоритм (2023) | $16.661^k \cdot \mathrm{poly}(n)$ |

**Полиномиальный множитель не зависит от k**

Bezáková et al., SIDMA 2019. Akmal, Vassilevska Williams, Williams, Xu, ESA 2023

# Неориентированный Detour: идея алгоритма

Сначала оставляем $G_{s,t}$: вершины, лежащие на простых (s, t)-путях.

## Большая древесная ширина

Если $\mathrm{tw}(G_{s,t}) > c \cdot k$,
нужный detour существует.

## Малая древесная ширина

Если $\mathrm{tw}(G_{s,t}) = O(k)$,
применяем динамику
по древесной декомпозиции.

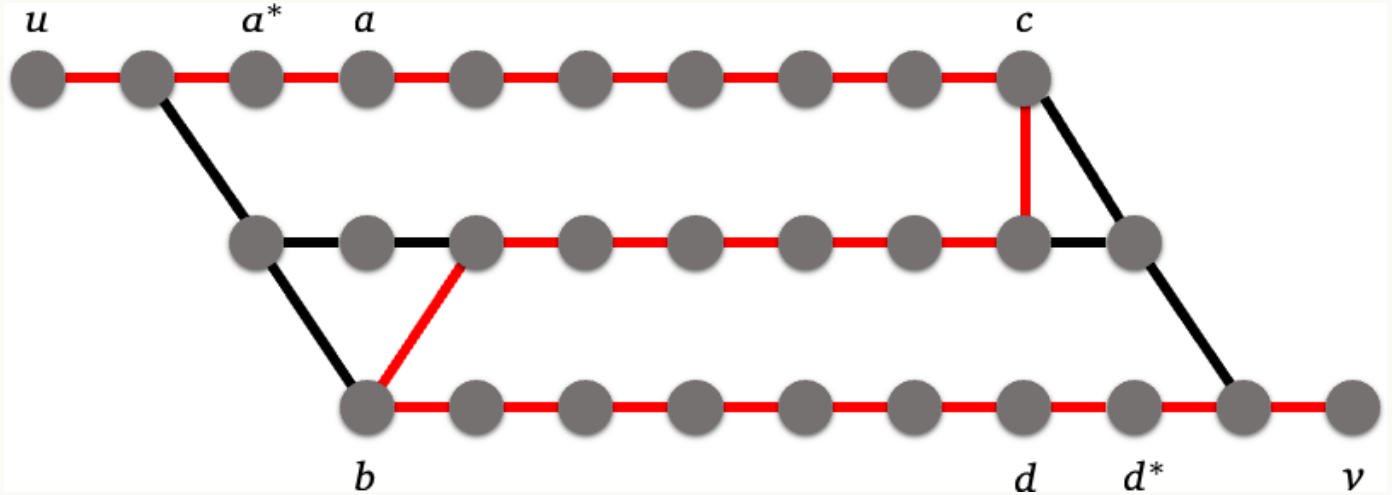
Структурная причина: большая ширина даёт длинное подразделение $K_4$,
через которое можно провести (s, t)-путь с нужным превышением.

Bezáková, Curticapean, Dell, Fomin, SIDMA 2019, раздел 3

# Индуцированный Detour: задача Сеймура

Требуем, чтобы путь P был индуцированным: между его несоседними вершинами нет рёбер. Кратчайший путь это гарантирует.

$$\ell(\mathrm{P}) \geq \mathrm{dist}(\mathrm{s},\, \mathrm{t}) + \mathrm{k}\ ?$$




**Красный путь индуцирован и длиннее кратчайшего. На рисунке s = u, t = v.**

Berger–Seymour–Spirkl, Discrete Math. 2021. Рисунок: Chiu–Lu, fig. 1

# Индуцированный Detour: результаты и граница

| Порог длины индуцированного пути | Что известно |
|---|---|
| $\mathrm{dist}(s, t) + 1$ | $O(n^{18})$, затем $O(n^{4.75})$ |
| $\mathrm{dist}(s, t) + 2$ | Полиномиальный алгоритм |
| $\mathrm{dist}(s, t) + 3$ | Полиномиальность открыта |

## Есть ли FPT-алгоритм по k для порога $\mathrm{dist}(s, t) + k$?

Для точной длины $\mathrm{dist}(s, t) + k$ есть XP-алгоритм:
при каждом фиксированном k время полиномиально.

Berger–Seymour–Spirkl, 2021, §1. Chiu–Lu, STACS 2022 / Inf. Comput. 2024

# Индуцированный Detour: идея полиномиальности

## 01 Редукция к слоям кратчайших путей

Каждая вершина x оставшегося графа лежит на кратчайшем s–t-пути: dist(s, x) + dist(x, t) = dist(s, t). Слой задаётся dist(s, x).

## 02 Монотонные части и нарушение монотонности

У кратчайшего среди некратчайших индуцированных путей выделяем монотонные начало и конец и место «поворота».

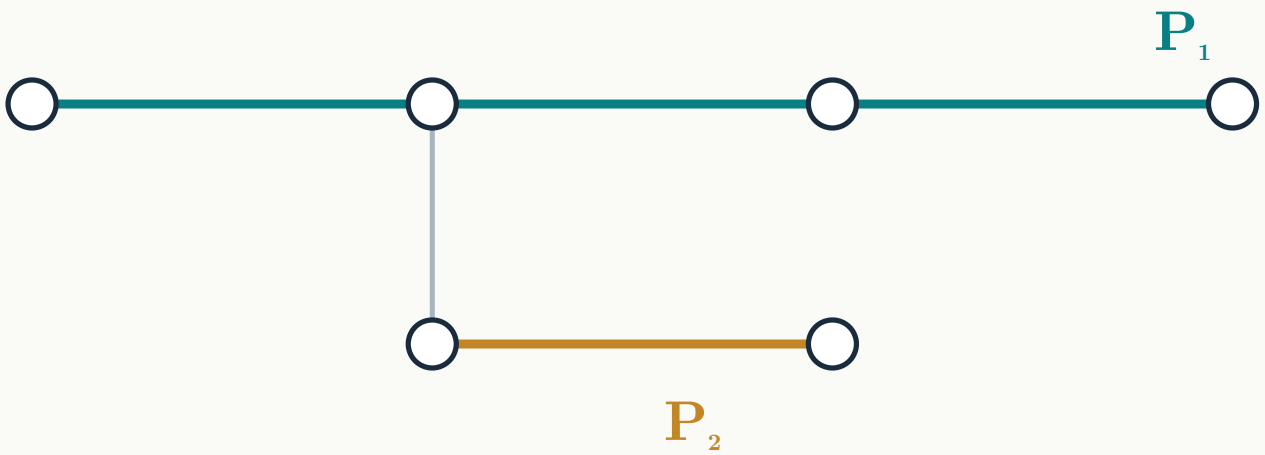
## 03 Маркер постоянного размера

Перебираем маркеры и достраиваем путь без хорд.
Ускорение Chiu–Lu: пакетная проверка пар «крыльев» матрицами.

Berger–Seymour–Spirkl, 2021, §2. Chiu–Lu, 2024, технический обзор

# Path Cover: задача

Покрыть все вершины минимальным числом попарно непересекающихся простых путей.




$$\mathrm{OPT} = \mathrm{pc}(G)$$

Здесь покрытие из двух путей

Одновершинные пути разрешены.
Здесь меньшее значение лучше.

# Path Cover: оценка Галлаи–Милграма

$$\mathrm{pc}(G) \leq \alpha(G)$$

Покрытие такого размера можно построить
за полиномиальное время без вычисления $\alpha(G)$

Версия below-guarantee

$$\mathrm{pc}(G) \leq \alpha(G) - \mathbf{k} \ ?$$

Оценка точна, например, на графах без рёбер

# Path Cover: положительный результат

За время $f(k) \cdot \mathrm{poly}(n)$ алгоритм строит покрытие P
и выдаёт один из двух результатов

## P оптимально

## Независимое множество I

$$|I| = |P| + k$$

Тогда $|P| \leq \alpha(G) - k$

Знание $\alpha(G)$ алгоритму не требуется

Fomin, Golovach, Jedličková, Kratochvíl, Sagunov, Simonov. STOC 2026

# Path Cover: отрицательный результат

**Обычный вопрос «$\mathrm{pc}(G) \le \alpha(G) - k$?» W[1]-труден**

Идея сведения: добавим универсальную клику на n вершинах

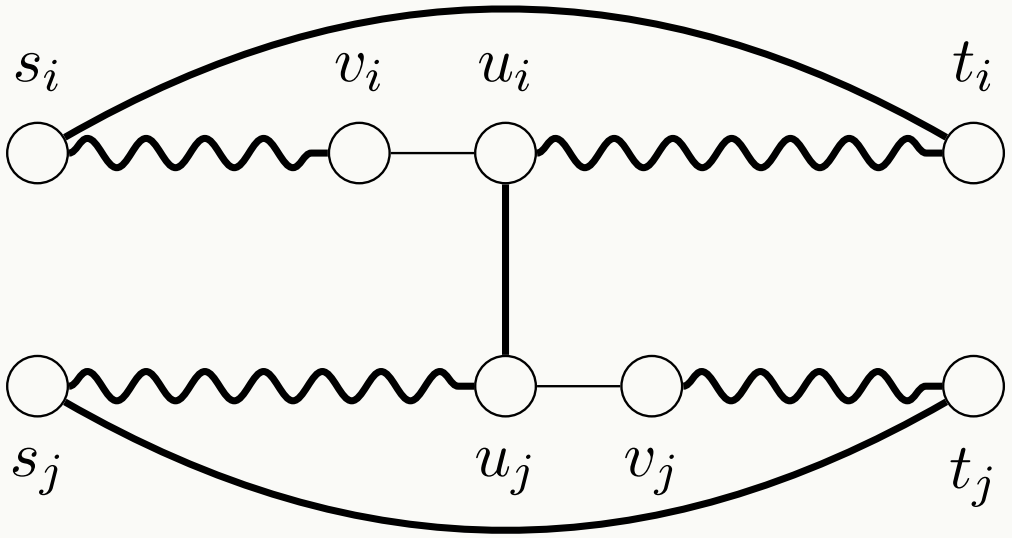
$$\mathrm{pc}(G') = 1, \quad \alpha(G') = \alpha(G)$$

**При $k = t - 1$ вопрос равносилен $\alpha(G) \ge t$**

Fomin et al., STOC 2026, обсуждение после теоремы 1

# Path Cover: слияние специальных путей

Специальный путь: одна вершина
или путь со смежными концами




Замыкаем пути в циклы,
разрезаем их у ребра $u_i u_j$
и склеиваем в один путь.

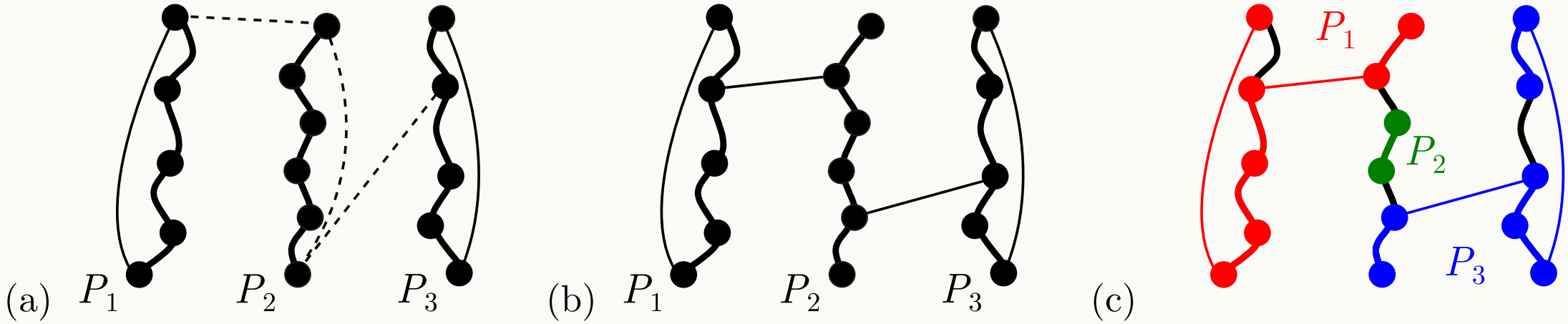
Жирным показан новый путь.
Волнистая линия обозначает подпуть.

**Любое ребро между такими путями позволяет склеить их**

Рис.: Fomin et al. Path Cover, Hamiltonicity, and Independence Number: An FPT Perspective, fig. 2(a)

# Path Cover: независимый сертификат

Перестройка увеличивает число путей с несмежными концами,
не увеличивая общее число путей |P|




Пунктир обозначает отсутствующие рёбра

**Если таких путей ≥ k, берём оба конца каждого,
а у остальных по одному: |I| ≥ |P| + k**

Рис.: Fomin et al. Path Cover, Hamiltonicity, and Independence Number: An FPT Perspective, fig. 1

# TSP below average: задача и гарантия

Полный неориентированный граф $K_n$, целые веса $w(e)$.

Треугольное неравенство не требуется.

Найти гамильтонов цикл $H$ минимального веса.

Ребро входит в случайный тур с вероятностью $2/(n-1)$.

$$h(w) = E[w(H)] = 2W \,/\, (n-1)$$

$W$ — сумма весов всех рёбер.

$$w(H) \le h(w) - k\ ?$$

При $k = 0$ гарантия достижима за полиномиальное время.

Gutin–Mnich, CSR 2025, §10. Vizing, 1973. Gutin–Patel, SIDMA 2016

# Неориентированный TSP: FPT и идея

Порог: $w(H) \le h(w) - k$

$$(O(k^3))! + O(k^3 n + n^7)$$

**FPT по k, с построением тура**

**01** Нормируем веса: стоимость всех туров сдвигается на одну и ту же константу.

**02** Либо получаем выигрыш k, либо $\Sigma|w'(e)| = O(kn)$.

**03** Большое отрицательное паросочетание даёт хороший тур. Иначе — $O(k)$ особых вершин и точная FPT-процедура.

Gutin–Patel, SIDMA 2016, Theorems 1.1–1.2, §3 и §6. Gutin–Mnich, Theorem 16

# Открытый вопрос: planar Independent Set

## Четырёхцветная теорема: $\alpha(G) \geq \lceil n/4 \rceil$

$$\alpha(G) \geq \lceil n/4 \rceil + k \ ?$$

## Есть ли FPT-алгоритм по k?

Неизвестен даже полиномиальный алгоритм
для $k = 1$ в общем классе планарных графов.

При $\Delta(G) \leq 4$ есть FPT-алгоритм (Mnich, 2016).
Без треугольников FPT известен для оценки $n/3$.

Gutin–Mnich, CSR 2025, Open Problem 5. Mnich, WALCOM 2016

# Открытый вопрос: Directed Detour

$$\ell(P) \geq \mathrm{dist}(s, t) + k$$

Простой ориентированный (s, t)-путь. Длина считается в дугах.

| Графы / параметр | Что известно |
|---|---|
| Неориентированные графы | FPT по k |
| Планарные орграфы | FPT по k |
| Общие орграфы, $k = 1$ | Полиномиальный алгоритм |

**Общие орграфы, произвольное k: открытый случай**

XP: $n^{f(k)}$ ?  FPT: $f(k) \cdot \mathrm{poly}(n)$ ?

Bezáková et al., SIDMA 2019. Fomin et al., JCSS 2023. Chen–Wein–Zhang, arXiv:2511.04345

# Открытый вопрос: Directed Path Cover

## Галлаи–Милграм: $\mathrm{pc}(D) \leq \alpha(D)$

$\alpha(D)$: между выбранными вершинами нет дуг ни в одну сторону

Можно ли за $f(k) \cdot \mathrm{poly}(n)$ построить покрытие $P$,

**которое оптимально**

**либо удовлетворяет $|P| \leq \alpha(D) - k$ ?**

**Первый шаг: $k = 1$ за полиномиальное время?**

Fomin et al. Path Cover, Hamiltonicity, and Independence Number: An FPT Perspective, §5 (2026)

# Открытый вопрос: ориентированный TSP

Полный орграф D: между каждой парой есть обе дуги.
Веса дуг — произвольные целые числа.

$$h(w) = E[w(H)] = W \,/\, (n - 1)$$

W — сумма весов всех дуг; вероятность одной дуги в туре — $1/(n - 1)$.

**Есть ли FPT-алгоритм по k для условия**

$$w(H) \leq h(w) - k \; ?$$

Случай $k = 0$ решается методом условных ожиданий.

Как перенести структурный аргумент для неориентированных 4-циклов?

Gutin–Mnich, CSR 2025, §10, Open Problem 8. Gutin–Patel, SIDMA 2016, Problem 7.1

# Открытые вопросы: приближение

## Циклы: above-guarantee для mad(G)

$$\mathrm{OPT} = \mathrm{mad}(G) + K$$

Можно ли за полиномиальное время получить $\mathrm{mad}(G) + \omega(\log K)$ в 2-связном графе?

---

## Detour: above-guarantee для dist(s,t)

Если $\mathrm{OPT} = \mathrm{dist}(s,t) + K$, можно ли получить $\mathrm{dist}(s,t) + \omega(\log K)$ за полиномиальное время?

# Что определяет сложность above-guarantee

| Пример | Определяющее условие | Результат |
|---|---|---|
| Max-Cut | Близость к кликовым блокам | Однократно экспоненциальный FPT |
| Max-SAT: A(F) | Ограниченная длина дизъюнктов | FPT / NP-полно при k = 2 |
| Independent Set: планарные | Планарность и отсутствие треугольников | Субэкспоненциальный FPT |
| Independent Set: Туран | Средняя степень d | FPT по паре (k, d) |
| Цикл: mad | 2-связность | FPT / NP-полно при k = 2 |
| Path Cover | Форма требуемого вывода | Алгоритм с сертификатом / W[1]-трудность |

# Резерв: почему цветовое кодирование работает

**01** Красим вершины независимо в $L + 1$ цветов

**02** У фиксированного пути из $L$ рёбер все цвета различны с вероятностью $(L + 1)! / (L + 1)^{L+1}$

**03** Динамика по подмножествам цветов находит разноцветный путь. Повторы дают время $2^{O(L)} \cdot \mathrm{poly}(n)$

# Резерв: обозначения и точность формулировок

| Обозначение / условие | Смысл |
| --- | --- |
| Длина пути и цикла | Число рёбер |
| k и K | k: требуемая прибавка, K: фактическая OPT − g |
| Вещественная оценка g | Порог g + k означает целый размер $\geq \lceil g + k \rceil$ |
| 2-связность | Не менее трёх вершин, удаление любой одной сохраняет связность |
| mad(G) | Максимум $2\|E(H)\| / \|V(H)\|$ по непустым $H \subseteq G$ |

# Литература: общая идея и классические примеры

Gutin, Mnich. A Survey on Graph Problems Parameterized Above and Below Guaranteed Values. CSR 2025. arXiv:2207.12278

Crowston, Jones, Mnich. Max-Cut Parameterized Above the Edwards–Erdős Bound. Algorithmica 2015. arXiv:1112.3506

Crowston et al. Parameterized complexity of MaxSat Above Average. TCS 2013. doi:10.1016/j.tcs.2013.01.005

Dvořák, Mnich. Large Independent Sets in Triangle-Free Planar Graphs. SIDMA 2017. doi:10.1137/16M1061862

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Turán's Theorem Through Algorithmic Lens. WG 2023. doi:10.1007/978-3-031-43380-1_25. arXiv:2307.07456

# Литература: пути, циклы и покрытия

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Algorithmic Extensions of Dirac's Theorem. SODA 2022. doi:10.1137/1.9781611977073.20

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Approximating Long Cycle Above Dirac's Guarantee. Algorithmica, 2024. doi:10.1007/s00453-024-01240-5

Fomin, Golovach, Sagunov, Simonov. Longest Cycle above Erdős–Gallai Bound. SIDMA, 2024. doi:10.1137/23M1558008

Fomin, Golovach, Jedličková, Kratochvíl, Sagunov, Simonov. Path Cover, Hamiltonicity, and Independence Number: An FPT Perspective. STOC 2026. doi:10.1145/3798129.3800747

# Резерв: цикл через заданные вершины

## Цикл с обязательными вершинами

Можно ли найти цикл длины $\geq 2\delta(G) + k$ через заданное множество $X$ в $|X|$-связном графе за $f(k) \cdot \mathrm{poly}(n)$?

# Литература: открытые вопросы

Gutin, Mnich. A Survey on Graph Problems Parameterized Above and Below Guaranteed Values. CSR 58 (2025), 100795. doi:10.1016/j.cosrev.2025.100795

Mnich. Large Independent Sets in Subquartic Planar Graphs. WALCOM 2016, 209–221. doi:10.1007/978-3-319-30139-6_17

Fomin, Golovach, Lochet, Sagunov, Simonov, Saurabh. Detours in Directed Graphs. JCSS 137 (2023), 66–86. arXiv:2201.03318

Chen, Wein, Zhang. A Polynomial-Time Algorithm for the Next-to-Shortest Path Problem on Positively Weighted Directed Graphs. arXiv:2511.04345v2 (2026)

Fomin et al. Path Cover, Hamiltonicity, and Independence Number: An FPT Perspective. STOC 2026. arXiv:2403.05943v3, §5

# Литература: detours и индуцированные пути

Bezáková, Curticapean, Dell, Fomin. Finding Detours Is Fixed-Parameter Tractable. SIDMA 33(4), 2326–2345, 2019. doi:10.1137/17M1148566

Akmal, Vassilevska Williams, Williams, Xu. Faster Detours in Undirected Graphs. ESA 2023, article 7. doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2023.7

Berger, Seymour, Spirkl. Finding an induced path that is not a shortest path. Discrete Math. 344(7), 112398, 2021. doi:10.1016/j.disc.2021.112398

Chiu, Lu. Blazing a Trail via Matrix Multiplications: A Faster Algorithm for Non-shortest Induced Paths. Inf. Comput. 301, 105227, 2024. doi:10.1016/j.ic.2024.105227 (STACS 2022)